# Chapitre 3 – Sémantique du calcul des propositions

On va donner du sens aux formules. Sont-elles vraies ou fausses ?

On les interprètes dans une algèbre de Boole qui n’a que 2 éléments : le vrai ou le faux, symbolisés par le 1et le 0, ainsi que 3 opérations : la somme booléenne (le OU), le produit booléen (le ET), la négation (le NON).

## Interprétation

Soit, P un ensemble de variables propositionnelles. On appelle valuation ou encore interprétation toutes application, notée v, de P dans {0,1}.

Ex Soit p = {A,B,C,D},

v(A)=0 v(B)=1 v(C)=1 v(D)=0

## Fonction Iv d’interprétation

Pour tout valuation v sur I, il existe une unique application Iv de F dans {0,1} tel que :

1. Pour tout , Iv(A) = v(A)
2. Si F = NON G alors Iv(F) = 1-Iv(G)
3. Si F = (G OU H) alors Iv(F)= Max(Iv(G), Iv(H))
4. Si F = (G ET H) alors Iv(F) = Iv(G) \* Iv(H)
5. Si F = (G => H) alors Iv(F) = 1-Iv(G) \* (1-Iv(H))
6. Si F = (G ⬄ H) alors Iv(F) = Max (Iv(G) \* Iv(H),(1-Iv(G)\*(1-Iv(H)))

Iv donne la valeur de vérité d’une formule.

Exemple : Soit P={A,B,C,D} et v(A) = v(B) = 1 v(C) = v(D) = 0

Quelle est la valeur de vérité de ( (A ET C) => (B OU D) ) ?

* 1

/ \

ET 0 OU 1

/ \ / \

A 1 C 0 B 1 D 0

## Table de vérité

On énumère toutes les valeurs de vérité d’une formule pour toutes les valuations de ses variables.

Table de vérité des connecteurs

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | NON A | A OU B | A ET B | A => B | A ⬄ B |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Remarques

* OU s’appelle la disjonction, ET la conjonction, NON la négation.
* A OU B est fausse si et seulement si à la fois A et B sont fausses.
* Le ‘ou’ n’est donc pas exclusif
* A ET B est vraie si et seulement si A et B vraies
* Si A est fausse alors A => B est vraie quel que soit B
* Même si A faux et B aussi, A⬄B est quand même vraie

Exo : Quelle est la valeur de vérité de ‘Si Napoléon et Jules César sont la même personne, alors 5 = 0’ ? C’est vrai

## Tautologies

Est-ce que A OU NON A est une tautologie ? oui

A OU B est une tautologie ? non

Définition : Une tautologie est une formule vraie pour toute interprétation de ses variables.

On note |= F pour dire ‘F est une tautologie’

REM : Les tautologie ont valeur de théorème.

Exercice : les formule suivantes sont-elles des tautologie ?

(P ET Q) => Q  : OUI

(P OU Q) => (P ET Q) : NON

(P ET Q) => (P OU Q) : OUI

P => (P OU Q) : OUI

P => ((NON P) => Q) : OUI

P => (P => Q) : NON

P => (P => P) : OUI

(P => Q) => (Q => R) => (P => R) : OUI

## Antilogie

Une antilogie est fausse pour toute interprétation de ses variables.

## Equivalence sémantique

Est-que ‘A ⬄ B’ ça n’a pas de sens !

La vraie question serait plutôt ‘Est-ce que A ⬄ B est une tautologie ? ’

|= A ⬄ B ?

Si oui, alors on dit que A et B sont équivalent sémantiquement. On note A ~ B

A~B se produit quand Iv(A) = Iv(B)

Exemple NON NON F ~ F

A OU B ~ B OU A

Etc…

C’est grâce à ça qu’on va pouvoir simplifier les formules.

### Quelques équivalence particulières

On peut se passer de => et ⬄.

En effet F => G ~ NON F OU G

Et F ⬄ G ~ (F => G) ET (G => F)

Exo : Démonstration par tables de vérité

D’autres équivalences sont bien connues.

On les énonce ci-dessous dans 2 notations : ensembliste et booléenne.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Idempotance | A U A = A  A ∩ A = A | A OU A ~ A  A ET A ~ A |
| Commutativité | A U B = B U A  A ∩ B = B ∩ A | A OU A ~ B OU A  A ET B ~ B ET A |
| Associativité | A U (B U C) = (A U B) U C  A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C | A OU (B OU C) ~ (A OU B) OU C  A ET (B ET C) ~ (A ET B) ET C |
| Absorption | A U E = E  A ∩ Ø = Ø | A OU 1 ~ 1  A ET 0 ~ 0 |
| Distributivités | A ∩ (B U C) = (A∩B) U (A∩C)  A U (B∩C) = (A U B) ∩ (B U C) | A ET (B OU C) ~ (A ET B) OU (A ET C)  A OU (B ET C) ~ (A OU B) ET (A ET C) |
| Involution | E\(E\A) = A | NON NON A ~ A |
| Complémentation | E \ Ø = E  E \ E = Ø | NON 0 ~ 1  NON 1 ~ 0 |
| Partition | A U (E\A) = E  A ∩ (E\A) U (E\B) | A OU NON A ~ 1  A ET NON A ~ 0 |
| Loi de Morgan | E\(A U B) = (E\A) ∩ (E\B)  E\ ( A ∩ B) = (E\A) U (E\B) |  |